EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

39e JAARGANG 1963/1964

I — 1 SEPTEMBER 1963

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift Euclides verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen *f* 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

NIET-EUCLIDISCHE EUCLIDISCHE MEETKUNDE

door

Prof. Dr. E. M. Bruins

Amsterdam

Jes. 40:3

Inleiding.

Het beeld, dat men zich tot voor kort over het ontstaan van euclidische en niet-euclidische meetkunden had gevormd komt in grote lijnen hierop neer: in de Oudheid bestond er geen twijfel of de opbouw door Euclides, liefst nog met in acht nemen van de aanwijzingen van Aristoteles, was de énig mogelijke en de juiste. Twijfel rees in de loop der tijden aangaande het „vijfde postulaat" ten aanzien van de „geldigheid" en ten aanzien van de „bewijsbaarheid". Door de onderzoekingen van Gauss, Lobatschefski en Riemann is dan ten slotte gebleken, dat dit postulaat niet bewijsbaar is en door andere gelijkwaardige kan worden vervangen, welke er dan op neer komen, dat door een punt buiten een rechte een verzameling van niet snijdende rechten kan worden getrokken, die een zekere „parallelhoek" vult, of dat er géén parallel bestaat of . . . wat dan tot de euclidische meetkunde leidt —, dat er één parallel bestaat.

Deze voorstelling is historisch onjuist!

Een iets nauwkeuriger schildering van het verloop der laatste twee eeuwen knoopt dan aan bij Saccheri, in verband met diens in 1733 uitgegeven werk: Euclides ab omni naevo vindicatus. Saccheri gaat uit van een lijnsegment AB en richt in de eindpunten twee loodlijnen op, respectievelijk AD en BC, die gelijke lengte hebben en verbindt C met D. In het midden M van AB richt Saccheri de loodlijn MN op, waarvan hij aanneemt, dat deze CD in N snijdt. Door „omklappen" bewijst Saccheri dan, dat de hoeken bij N recht zijn en dat de hoeken bij C en D gelijk zijn, alles wegens de „dekking" der figuren. Of de hoek bij C stomp, scherp of recht is, weet men „niet onmiddellijk". De onderstelling van een stompe hoek leidt tot een eindige lengte van de gehele rechte, wat Saccheri meent te moeten uitsluiten, terwijl hij meent de onderstelling van een scherpe hoek tot een tegenspraak te voeren, waardoor alléén de mogelijkheid van een rechte hoek blijft en deze leidt dan tot de euclidische meetkunde.

J. H. Lambert ging uit van een vierhoek met drie rechte hoeken, „de helft van een Saccheri-vierhoek", welke hij verkreeg, door in een punt van de loodlijn in A een loodlijn op te richten en te *onderstellen,* dat deze de loodlijn in B snijdt, (fig. 1b). De existentie van het „vierde hoekpunt" levert moeilijkheden op! Deze kunnen in de vierhoek van Saccheri vermeden worden met behulp van het „axioma van Pasch". Reeds in het begin van de negentiende eeuw had C. F. Gauss opgemerkt, dat men de „tussen-relatie" diende te axiomatiseren. Eerst een zeventig jaren later (1880) formuleerde Moritz Pasch: dat indien een rechte een punt óp een zijde van een driehoek bevat, dat géén hoekpunt is, deze rechte ten minste nog één der andere zijden van de driehoek snijdt." Indien twee loodlijnen op eenzelfde rechte elkander in een punt S op eindige afstand snijden levert „spiegeling in deze rechte", dat de loodlijnen nog een tweede punt S' gemeen moeten hebben. Valt S *niet* met S' samen, dan gaat er door S en S' méér dan één verbindingslijn; valt S met S' samen, dan is — wegens de „additie van afstanden" — de totale lengte der rechte lijn het dubbele van de oorspronkelijke loodlijn. Trekt men dus in een vierhoek van Saccheri (fig. 1a) de diagonaal BD, dan heeft MN met één zijde van driehoek ABD een punt gemeen, dat géén hoekpunt is; de loodlijn MN kan de loodlijn AD niet snijden en moet dus volgens het axioma van Pasch BD snijden. Dan heeft MN met één zijde van driehoek DCB één punt gemeen, dat géén hoekpunt is(!), en heeft dus met CD een punt gemeen, daar MN de loodlijn BC *niet* snijdt.

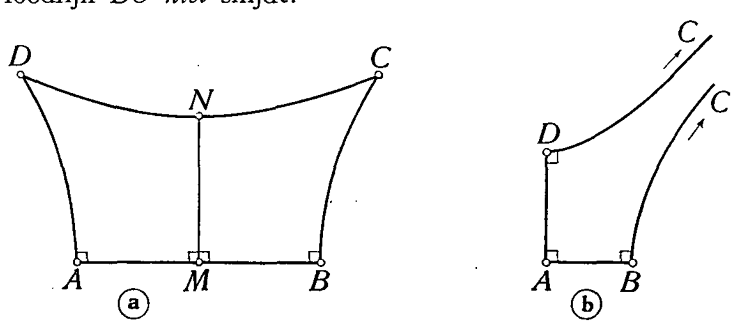


Fig. 1.

De onderzoekingen van de laatste decennia — en dit is vooral te danken aan Russische arabisten-mathematici — hebben aangetoond, dat *een goede achthonderd jaren eerder* het axioma van Pasch werd geformuleerd door Ibn al Haithâm. Deze meende aanvankelijk een „bewijs voor het parallelenaxioma" te hebben

gevonden: door in de punten van een rechte loodlijnen van gelijke lengten op te richten en *de eindpunten te verbinden door een rechte lijn* slaagde hij in zulk een bewijs. De misgreep werd door Omar al Khayyâm aangewezen: het spreekt niet vanzelf, dat deze eindpunten *alle op één rechte* liggen. Bij de discussies, die naar aanleiding daarvan ontstonden, werd enerzijds het axioma van Pasch geformuleerd en anderzijds het aantal loodlijnen tot twee beperkt... dus tot een „vierhoek van Saccheri" overgegaan. Joeschkewitsch heeft kunnen aangeven, dat vertalingen van de samenvattingen beschikbaar zijn geweest op plaatsen, die door Wallis en Saccheri bezocht werden. In elk geval is daarmede een mogelijke afhankelijkheid van het werk van Saccheri van het werk van mathematici, die een kleine duizend jaar eerder leefden en werkten en van de tijd, die sinds Euclides verlopen is, wordt daarmede de helft overbrugd!!

Er zijn enkele aanwijzingen, dat het werk van Euclides reeds in de Oudheid aan ernstige kritiek heeft blootgestaan. Reeds ten aanzien van de allereerste propositie: het construeren van een gelijkzijdige driehoek met zijde AB staat dit vast. Proklos vermeldt, dat Zenoon van Sidoon de vraag heeft gesteld of de rechten AC en BC uit A en B naar een snijpunt van de cirkels met straal AB om A en om B getrokken niet méér dan een punt, een segment, gemeen konden hebben. Proklos merkt op, dat dit in tegenspraak zou zijn met het tweede axioma, dat „bedoeld is" om de ondubbelzinnige verlenging van een lijnstuk op een rechte te eisen. Het komt steller dezes voor, dat het nauwelijks denkbaar is, dat Zenoon een dergelijke tegenwerping heeft willen maken, die zo apert onjuist is. Het ligt méér in de gedachtengang om — gezien het volkomen ontbreken van enige beschrijving van wat een „cirkel" is in het derde axioma: „en dat met elk middelpunt en elke afstand een cirkel kan worden beschreven" — te interpreteren, dat Zenoon de vraag gesteld heeft *of deze twee cirkels: om A met AB, en om B met BA, als straal niet een segment gemeen kunnen hebben.* In dit opzicht is Zenoon's opmerking als „eene stem eens roependen in de woestijn" geweest én... hij zou volkomen gelijk hebben gehad!

Om ons van alle visuele moeilijkheden te bevrijden geven wij in het volgende een metrisering van het projectieve vlak, welke leidt tot een meetkunde, waarin *alle* axiomata van Euclides gelden en die toch niet de euclidische meetkunde is: een niet-euclidische euclidische meetkunde dus. Duidelijkheidshalve worden de overeenkomstige ontwikkelingen van meer bekende meetkunden daarnaast gesteld en de *essentiële betekenis van de oppervlakte* komt dan tot uiting.

Projectieve meetkunde.

Een punt x van het projectieve vlak wordt — per definitie — bepaald, is, een greep van drie homogene coördinaten (x_1, x_2, x_3), die niet alle nul zijn. Hierbij kiezen wij voor x_i gewone complexe getallen.

Een *rechte* is de verzameling van punten, waarvan de coördinaten voldoen aan een lineaire betrekking, met drie, niet alle nul zijnde, coëfficiënten A_i.

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0.$$

Deze lineairvormen korten wij af door (Ax). De coördinaatgreep (A_1, A_2, A_3) is dan een coördinaatgreep voor de rechten. Door *twee* punten a en b is de verbindingsrechte ondubbelzinnig bepaald. Twee rechten hebben een ondubbelzinnig bepaald snijpunt.

Kort men de determinant, waarvan de kolommen gegeven zijn door de coördinaatgrepen van de punten x, y en z af door (xyz), dan is de vergelijking van de verbindingslijn der punten a en b in lopende coördinaten x gegeven door $(abx) = 0$ en het snijpunt van de rechten A en B heeft in lopende coördinaten U de vergelijking $(ABU) = 0$.

Sluit men de eenvoudige overgang op toegevoegd complexe coördinaatgrepen uit, dan is de meest algemene transformatie, die punten in punten en rechte lijnen in rechte lijnen overvoert en daarbij de incidentie van punt en rechte behouden laat, de *lineaire transformatie:*

$$x'_i = t_{i1}x_1 + t_{i2}x_2 + t_{i3}x_3, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Voor de omkeerbaarheid der transformatie is nodig en voldoende, dat de determinant $T = |t_{ik}|$ niet nul is. Gaat door de lineaire transformatie (Ax) over in $(A'x')$ dan worden de A getransformeerd in de A' door de matrix $\tau_{ik} = t_{ki}$ [rijen en kolommen worden verwisseld] en de relatie wordt

$$A_k = t_{1k}A'_1 + t_{2k}A'_2 + t_{3k}A'_3, \qquad (k = 1, 2, 3).$$

De vermenigvuldiging van determinanten leert, dat $(x'y'z') = T(xyz)$. Zijn *twee* punten x, y en *twee* rechten A, B gegeven, dan is voor alle lineaire transformaties de grootheid

$$\frac{(Ax)(By)}{(Ay)(Bx)}$$

een *absolute invariant,* dat wil zeggen, vóór en ná transformatie, welke der verschillende homogene grepen men ook inzet voor de punten en de rechten, die gegeven waren, wordt dezelfde waarde

voor deze „dubbelverhouding van twee punten en twee rechten" verkregen. Bovendien is duidelijk, dat als men de rechten A en B vasthoudt en de dubbelverhouding voor de punten x, y en y, z kent, die voor x, z door *vermenigvuldiging* wordt verkregen.

De lineaire — projectieve — transformaties vormen een *achtledige* groep: er zijn negen t_{ik} en het komt slechts op hun verhouding aan. Elke transformatie heeft dekelementen, punten of rechten, die met hun toegevoegde samenvallen. De dekpunten worden gevonden door $x'_i = \alpha x_i$ te stellen en de vergelijkingen op te lossen; dit is slechts mogelijk als de waarde van α zó wordt gekozen, dat de α-determinant, welke ontstaat door de elementen op de hoofddiagonaal van $||t_{ik}||$ met α te verminderen, nul wordt.

Moet een bepaald gegeven punt in een ander voorgeschreven punt overgaan, dan levert dit *twee* lineaire betrekkingen tussen de t_{ik}. Vier paren toegevoegde punten in algemene ligging bepalen de t_{ik} op een gemeenschappelijke factor na.

Voorbeelden.

1. Eist men, dat (1, 0, 0) en (0, 1, 0) invariant zijn dan moet $\alpha = t_{11}$, $0 = t_{21}$, $0 = t_{31}$ en $0 = t_{12}$, $\beta = t_{22}$, $0 = t_{32}$ gelden. De *vierledige* ondergroep heeft de matrix van transformatie

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 0 & a \\ 0 & \beta & b \\ 0 & 0 & c \end{Vmatrix}$$

2. Eist men, dat de punten $(1, i, 0)$ en $(1, -i, 0)$ invariant blijven, dan worden de voorwaarden
$\alpha = t_{11} + \mathrm{i}t_{12}$, $\mathrm{i}\alpha = t_{21} + \mathrm{i}t_{22}$, $0 = t_{31} + \mathrm{i}t_{32}$ en
$\beta = t_{11} - \mathrm{i}t_{12}$, $-\mathrm{i}\beta = t_{21} - \mathrm{i}t_{22}$, $0 = t_{31} - \mathrm{i}t_{32}$
en hieruit volgt:
$t_{11} = t_{22} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $t_{12} = -\, t_{21} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}(\alpha - \beta)$, $t_{31} = t_{32} = 0$.
Men kan zonder bezwaar alle t_{ik} met een dusdanige factor vermenigvuldigen dat $t^2{}_{11} + t^2{}_{12} = 1$ wordt en de *vierledige* transformatiegroep wordt

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & a \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & c \end{Vmatrix}$$

Hierin herkent men gemakkelijk de gelijkvormigheidstransformatie van het cartesische vlak.

3. Eist men, dat de kromme $x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 = 0$ invariant blijft dan moet

$$\sum_{i=1}^{3} t_{ik} t_{il} = T\delta_{kl},$$

waarin T een constante is en δ_{kl} nul is, wanneer $k \neq l$ en 1 als $k = l$. De transformatiegroep is *drieledig*, de groep der „orthogonale transformaties".

Zoekt men *drieledige* ondergroepen van de algemene projectieve groep, die dus wanneer één punt invariant gehouden wordt in het algemeen nog een *eenledige* groep van transformaties overlaat en zal deze een kromme invariant laten van de klasse N, dan kan N niet groter zijn dan 2. Immers is P invariant, dan zijn ook de raaklijnen uit P aan de kromme van de klasse N door P invariant en tevens de raakpunten met deze kromme. Is N groter dan 2, dan verkrijgt men *met* „P invariant" nog ten minste *drie* andere invariante punten en de transformatie wordt de identiteit.

De transformaties, die een niet-ontaarde kegelsnede invariant laten zijn inderdaad elementen van een *drieledige* groep. Deze groepen zijn de „bewegingsgroepen" in de hyperbolische meetkunde en in de elliptische meetkunde al naar gelang de kegelsnede reëel of zuiver imaginair is.

In het geval, dat twee punten invariant zijn, — dat wil dus zeggen, dat de klassekegelsnede ontaardt in twee stralenwaaiers —, ontstaat een *vierledige* groep. Door nog één lineaire voorwaarde aan de coëfficiënten van de transformatiematrix op te leggen ontstaat dan een drieledige groep.

Kiest men in het tweede voorbeeld de coëfficiënt $c = 1$, dan is zulk een lineaire voorwaarde gegeven en de *groep der congruente transformaties van het cartesische vlak* ontstaat, welke leidt tot de euclidische meetkunde.

Mét twee punten is ook de verbindingslijn van deze punten invariant. Zou men nog een tweede rechte, willekeurig aangenomen, invariant willen laten, dan ontstaat een *tweeledige* groep. Kiest men echter de rechte *door* één van de reeds invariante punten, dan resulteert een drieledige groep. Kiest men in het eerste voorbeeld de rechte $x_1 = 0$ als tweede invariante rechte, dan is $a = 0$ en, daar men $c = 1$ kan kiezen, wordt de transformatiegroep in inhomogene coördinaten $(x, y, 1)$

$$x' = ax, \ y' = by + \beta, \ [z' = z = 1]$$

De „oneigenlijke punten" op $x_3 = z = 0$ *worden dan uit de meetkunde gebannen*! Terwijl bij de euclidisch-congruente transformaties

de invariante graad-kegelsnede in een dubbelrechte ontaardt, is in het laatste geval deze kegelsnede in twee rechten ontaard!

Onderzoek van enkele drieledige groepen

Eenvoudigheidshalve en volledigheidshalve bespreken wij drieledige groepen, die met de boven gegeven voorbeelden overeenstemmen in omgekeerde volgorde.

3. *Een niet ontaarde kegelsnede invariant.*

Door een transformatie van een drieledige groep kan in het algemeen een puntenpaar x, y *niet* worden overgevoerd in een andere puntenpaar X, Y, daar dit neerkomt op het voldoen aan *vier* voorwaarden door *drie* parameters. Dit houdt dus in, dat een puntenpaar één invariant heeft, die wij op „afstand'' kunnen reduceren.

Het puntenkoppel x, y bepaalt een verbindingsrechte, welke de kegelsnede snijdt in twee punten, waarin de kegelsnede geraakt wordt door twee lijnen P en Q. De dubbelverhouding van x, y en P, Q is een invariant en bij transformatie worden x, y in X, Y overgevoerd, dan en slechts dan als ook de overeenkomstige raaklijnen, bepaald door de punten X, Y op analoge wijze, in elkander overgaan. De invariant van twee punten is dus deze dubbelverhouding. Dan en slechts dan als de raaklijnen dezelfde blijven, dat wil dus zeggen, als de punten collineair zijn, ontstaat de dubbelverhouding voor de punten x, y uit die voor x, z en z, y door vermenigvuldiging. Een *additieve afstandsmaat* wordt dus verkregen door de logarithme van de dubbelverhouding. Men definiëre dus de „afstand xy'' met

$$xy = k \cdot \ln \frac{(Px)(Qy)}{(Py)(Qx)},\quad k \text{ een constante.}$$

De hoekmeting van de „hoek bepaald door twee rechten'' is volkomen duaal. Door drie punten, dus drie afstanden, is een driehoek volledig bepaald en daarmede is een afhankelijkheid van de hoek en de zijden vastgelegd, die tot de *trigonometrie* voert. Hierop gaan wij hier niet verder in.

2. Om de afstand van twee punten bij de congruente drieledige groep

$$x' = \cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y + az,\; y' = -\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y + bz,\; z' = z = 1$$

te vinden, dient men uit deze vergelijkingen en de overeenkomstige in X, Y en X', Y' de drie parameters te elimineren. Dit is zeer eenvoudig en leidt tot

$$(X' - x')^2 + (Y' - y')^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2$$

en daarmede tot de voor *collineaire punten* additieve afstandsmaat

$$Xx = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2}$$

De transformatie van lijncoördinaten, waarvan wij slechts een gedeelte uitschrijven.

$$A_1 = \cos \varphi A'_1 - \sin \varphi A'_2, \ A_2 = \sin \varphi A'_1 + \cos \varphi A'_2$$

levert voor de rechten de invariant $A^2{}_1 + A^2{}_2$. Het nul zijn van deze invariant betekent, dat de rechte door één der invariante punten gaat.

Twee rechten hebben, zoals door inzetten blijkt, één invariant

$$A_1 B_1 + A_2 B_2$$

en deze *bilineaire* invariant maakt het mogelijk bij elke rechte een *loodlijn* te vinden voor elk van haar punten, ook *zonder* dat een hoekmeting wordt ingevoerd. De twee rechten bepalen in het algemeen een dubbelverhouding met de twee invariante punten en door de logarithme te nemen van deze wordt een *additieve hoekmaat* voor lijnen, die door één punt gaan, verkregen. Waar een driehoek door drie punten, en derhalve door drie afstanden is bepaald, zal een betrekking bestaan tussen de zijden en de hoeken van een driehoek, die tot een *trigonometrie* leidt.

2a. Verwisselt men de rijen en kolommen in een „congruente matrix" volgens 2, dan hebben twee lijnen géén bilineaire invariant en het zal *onmogelijk zijn* om loodlijnen te definiëren!!

Wij menen hiermede de normale euclidische meetkunde, die ontstaat, voldoende te hebben toegelicht. Cirkels worden hier krommen van de tweede graad, die door de invariante punten gaan.

1. Noemen wij eenvoudigheidshalve de invariante punten s en a en hun verbindingslijn S en de tweede invariante lijn gaande door s analoog A, dan is er voor elk tweetal punten een dubbelverhouding bepaald met de twee rechten S en A en voor elk paar rechten P en Q een dubbelverhouding te vinden met behulp van de punten s en a. De logarithme levert dan een additieve afstand en een additieve hoekmaat. De punten op een vaste afstand van het punt x gelegen *liggen op een rechte door s*. De punten op afstand *nul* van x liggen op sx! „Cirkels" worden rechte lijnen door s. *Alle punten zijn middelpunt van alle cirkels.* Is een „cirkel" gegeven, dan kan men middelpunt en straal *niet* ondubbelzinnig terugvinden, integendeel beide blijven geheel onbepaald. Duaal gaan alle lijnen, die een bepaalde hoek met een gegeven lijn X vormen door één punt op de rechte S; twee rechten maken een hoek *nul* als zij op de rechte S hun snijpunt hebben!

Bij de keuze van de invariante punten en rechten uit het eerste voorbeeld volgt, dat wegens $x' = ax$, $y' = by + \beta$, twee puntenparen dan en slechts dan in elkander kunnen worden overgevoerd als dezelfde waarde van a optreedt, dus als $X' : x' = X : x$. De afstand van twee punten is dus, op een multiplicatieve constante na,

$$Xx = \ln X - \ln x$$

en de „cirkels" zijn de rechten $x =$ constant. Transformatie van de rechte $y' = m'x' + n'$ levert $y = mx + n$ met $mb = m'a$ en voor twee rechten waarvoor $m_1 + m_2 = 0$ is, blijft deze uitdrukking nul na transformatie. De voorwaarde voor *loodrechte stand* is dus $m_1 + m_2 = 0$. In het cartesische vlak is de „loodlijn" dus de rechte, die ten opzichte van de x-as-richting gespiegeld wordt! Deze definitie van loodlijnen kan worden ingevoerd *zonder* dat van hoekmeting sprake behoeft te zijn. Evident gelden in deze meetkunde de axiomata I, II, III, IV van Euclides, maar óók axioma V geldt! De hoekmeting ingevoerd met behulp van de dubbelverhouding levert voor $k = -\frac{1}{2}i$ een rechte hoek met de grootte $\frac{1}{2}\pi$, omdat de dubbelverhouding voor loodrechte lijnen -1 is. Indien nu een rechte L door de rechten A en B gesneden wordt, dan is de hoek BL te meten door de dubbelverhouding $(Bs)(La)/(Ba)(Ls)$ en de hoek LA te meten door de dubbelverhouding $(Ls)(Aa)/(La)(As)$ en wel telkens door de logarithme te nemen en met een „maatconstante" te vermenigvuldigen. De *som* van deze hoekmaten is de *logarithme van het product der dubbelverhoudingen en dus de logarithme van* $(Bs)(Aa)/(Ba)(As)$. Is de maatconstante zó gekozen, dat de rechte hoek $\frac{1}{2}\pi$ wordt, dus de logarithme πi is, dan is de som van de logarithmen $2\pi i$ en de laatste dubbelverhouding is dus 1. Dat wil echter zeggen, dat de rechten B en A elkander op *sa, de uit het vlak gebannen rechte* $x_3 = 0$, snijden, dus in euclidische zin „parallel" zijn.*

Wat onderscheidt deze niet-euclidische euclidische meetkunde van de normale euclidische meetkunde?

Allereerst is er geen driehoeksongelijkheid! De differentiaalmeetkunde levert $ds = dx$ in tegenstelling tot $ds^2 = dx^2 + dy^2$ in de normale euclidische meetkunde. De meetkunde met een *lineair lijnelement* laat geen *oppervlakte* toe in de zin van Gauss. Alvorens op deze verschillen in te gaan geven wij nog enkele verschilpunten.

De gebruikelijke, doch onjuiste of onvolledige, beschrijving van

$(Bx)(Ay) - (By)(Ax) = 0$ is in lopende coördinaten x de vergelijking van de rechte, uit de waaier gevormd door A en B, welke door het punt y gaat.

de verschillen tussen euclidische en niet-euclidische meetkunde luidt: in de euclidische meetkunde heeft een rechte één oneindig ver punt, oneindig ver „voorwaarts" doet hetzelfde punt bereiken als oneindig ver „terug". Draait men een rechte om één van zijn punten, dan beschrijft het oneindig verre punt de „oneindig verre rechte". In de niet-euclidische meetkunde zijn er of géén oneindig ver gelegen punten of er zijn twee verschillende oneindig verre punten. Draait men in het laatste geval een rechte om één van zijn bereikbare punten, dan beschrijven de oneindig verre punten een kegelsnede. Deze neemt men dan voor de Lobatschefski meetkunde als reëel aan.

De niet-euclidische euclidische meetkunde ontstaat als de twee oneindig verre punten in het algemeen wel verschillend zijn, doch de kegelsnede ontaardt in *twee* rechten, één bevattende de punten op afstand + oneindig en één die op afstand — oneindig, terwijl het snijpunt der rechten een volkomen onbepaalde afstand tot andere punten heeft. Door wél de punten op —oneindig aan het vlak toe te voegen, maar die op +oneindig weg te nemen ontstaan de „parallelen" in de niet-euclidische euclidische meetkunde.

Deze meetkunde levert: Zenoon vindicatus! De cirkel met straal *ab* om *a* is de rechte *bs*, die met straal *ba* om *b* de rechte *bs*. In het algemeen is er slechts één punt, waarin deze cirkels snijden: het punt *s*, dat onbepaalde afstand heeft tot *a* en tot *b*. Het is echter mogelijk, dat de cirkels deels samenvallen. Dit ziet men het eenvoudigst aldus in: de afstand van twee punten is de hoekmaat van de uit *s* projecterende rechten, de hoek van twee rechten is de afstand van de op *S* ingesneden punten. Kiest men als de invariante rechte de isotrope rechten door *S*, dan wordt, alles bij passende maatconstante, de afstand van twee punten gelijk aan de hoek, waaronder men deze ziet in *S*. In dit geval is een cirkel met straal $2\pi/3$ om het punt *A* een halfrechte door *S* welke door *B* op afstand $2\pi/3$ gaat én een tweede halfrechte. De cirkel om *B* met straal $2\pi/3$ heeft met de eerste cirkel deze laatste halfrechte gemeen!

In de niet-euclidische euclidische meetkunde geldt Euclides I, 1 *niet*. De beweging volgens I, 2 en het afpassen volgens I, 3 *kan niet aldus worden uitgevoerd*... maar de uitvoerbaarheid geldt wél. I, 4 de congruentie van twee driehoeken, die twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben *geldt niet*. Beweegt men het hoekpunt *c* van driehoek *abc* langs *cs*, dan blijven alle zijden gelijk, de hoeken veranderen! I, 5; I, 6 over gelijkbenige driehoeken gelden evenmin als I, 7 en I, 8. Daarentegen zijn de hoekdeling en de afstandsdeling wél uitvoerbaar, doch *niet* met behulp van een gelijkzijdige

driehoek! Wat aan oppervlaktestellingen na I, 34 volgt is of onjuist of triviaal, omdat alle oppervlakten *nul* zijn. De conclusies, die daaruit tot de stelling van Pythagoras leiden gelden niet.

De conclusie moet dus zijn, dat het zwakke punt niet of niet slechts het vijfde axioma is, doch de onvoldoende omschrijving van de cirkel, welke het derde axioma zonder meer inhoudsloos maakt. In feite wordt in Euclides I alles „uit de figuur" met behulp van *getekende* cirkels afgeleid. Van een fraaie axiomatiek is dus in het geheel geen sprake. Het is spijtig, dat hieruit meteen volgt, dat zonder dit te vermelden een behandeling van Euclides I als een „voorbeeld van hoe een wiskundig betoog moet worden opgesteld", op een samenstel van onjuiste redenering en physische waarneming terugvoerbaar zijnde, bij het onderwijs niet verantwoord is.

Meetkunde met oppervlakten.

De niet-euclidische euclidische en de normale euclidische meetkunde onderscheiden zich daardoor, dat in de eerste géén bewegingsinvariante oppervlakte kan worden gedefinieerd, die van nul verschillend is. Een dieper inzicht in de ontstaanswijze van de euclidische meetkunde kan naar onze mening worden verkregen door op te merken, dat het eerste tweetal incidentieaxiomata de eigenschappen van de rechte lijn nader preciseert. Het vierde axioma is een voor de Babyloniërs, die uitsluitend met „loodlijnen" werkten, voor de hand liggende eis . . . om bewegingen te kunnen uitvoeren: het doet er dan niet toe waar men een rechte en een loodlijn daarop begint te tekenen! De formulering van het vijfde axioma wijst ook op babylonische voorkennis. Voor de Babyloniër is het een algebraïsche evidentie, dat twee lijnen met dezelfde „helling" — welke hij meet als onze tg α — elkander *niet* snijden en dat dit wel het geval is als de hellingen verschillend zijn. Euclides formuleert dan ook het vijfde axioma in het *negatieve*: als de hoeken etc. . . . samen kleiner dan twee rechten zijn snijden zij elkander. Wat er gebeurt als zij wél gelijk zijn aan twee rechten . . . wordt door Euclides niet gezegd en derhalve sluit Euclides *niet* uit, dat twee loodlijnen op één rechte elkander kunnen snijden. De *elliptische meetkunde* werd niet uitgesloten. De constructie van de loodlijn I, 12 is *onjuist*: voor een rechte en haar pool in de elliptische meetkunde vindt men op deze wijze *geen enkele* loodlijn . . . terwijl er oneindig veel zijn, namelijk alle rechten door de pool! I, 16 over het groter zijn van een buitenhoek dan elke niet aanliggende binnenhoek — het „boloctant" is vernietigend tegenvoorbeeld.

De Babyloniër voerde naast zijn rechten en loodlijnen de afstands-

meting met een additieve functie voor lijnstukken langs dezelfde rechte in. Daarnaast meet hij in de oudste tijden de oppervlakte in „imeru" — ezelslast — de hoeveelheid graan nodig om een oppervlakte te bezaaien en komt tot een „additieve oppervlaktefunctie". Wij gaan een tweetal voorbeelden na.

a. *Euclidische meetkunde.*

Wij construeren een Lambert-vierhoek $ABCD$ met rechte hoeken bij A, B, D en onderstellen niets omtrent de hoek bij C. Is $AB = a$ en $AD = b$ en heeft de Lambertvierhoek een oppervlakte, dan is deze bepaald als functie van a en b.

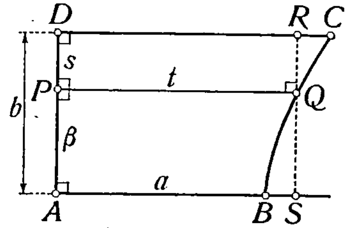


Fig. 2.

Uit $F = ab$ volgt dan, bij additie van oppervlakten, dat de hoek bij C recht is en dus de normale euclidische meetkunde geldt. Immers (fig. 2) is P een punt op AD en richt men de loodlijn in P op AD op, dan snijdt deze — voor ons is voor het ogenblik met de Babyloniër evident, dat twee loodlijnen elkander niet snijden als ze op dezelfde rechte getrokken zijn — volgens „Pasch" de zijde BC in Q. Is $AP = \beta$ dan is de oppervlakte van $QBAP$ te berekenen als $a\beta$ en *wegens de additie van oppervlakten* is dan de oppervlakte van $QPDC$ gelijk aan $ab - a\beta = a(b - \beta)$ en dus volgens de *additie van afstanden as.* Is nu voor alle PQ de hoek bij Q recht, dan is er niets verder te bewijzen. Is de hoek bij Q *niet* recht, dan kan men een loodlijn RQS op PQ trekken, die dan — volgens Pasch — één der zijden AB of CD snijdt, en de andere op het verlengde snijdt. Van de figuren $QPDR$ en $QPAS$ geldt dus, dat als de éne groter is dan $QPDC$ de andere kleiner is dan $QPAB$ of omgekeerd. Er zijn echter twee Lambert-vierhoeken ontstaan en men heeft dus, als de lengte van PQ gelijk t is

óf: $as > ts$ én $a\beta < t\beta$ dus $t > a$ én $t < a$, quod non

óf: $as < ts$ én $a\beta > t\beta$ dus $t < a$ én $t > a$, quod non.

Derhalve is de hoek bij Q steeds recht en $t = a$.

b. *Elliptische meetkunde.*

Teneinde aan te tonen, dat men ook andere functies voor de oppervlakte van de Lambert-vierhoek kan invoeren, dus niet aan

ab voor de oppervlakte bij voorbaat gebonden is, werken wij de analoge methode iets nader uit voor de *definitie*

$$\sin F = \sin a \sin b.$$

Wij spreken dus nog niet over hoekmaten. Zodra men de stelling van I, 8 heeft geformuleerd: dat twee driehoeken met drie zijden overeenkomstig gelijk ook de drie hoeken overeenkomstig gelijk hebben, is de hoekmeting *aan de afstandsmeting gekoppeld.* Men dient zich dan meteen de vraag te stellen of een hoekmeting, zoals deze door Euclides onafhankelijk van de afstandsmeting wordt gedefinieerd niet tot tegenspraken kan en zal leiden. Dat dit *niet* het geval is in de euclidische meetkunde staat eerst vast als men de hoekmaat met behulp van dubbelverhouding van afstanden — die dan nog gedeeltelijk complex zijn ook — tot de afstandsmeting heeft teruggebracht.

Vergroot men de zijde b van een Lambert-vierhoek met β dan ontstaat een Lambertvierhoek met oppervlakte F_1

$$\sin F_1 = \sin a \sin (b + \beta)$$

De verschiloppervlakte D levert dan

$$\begin{aligned} \sin D = \sin (F_1 - F) &= \sin F_1 \cos F - \sin F \cos F_1 = \\ &= \sin a \sin (b + \beta) \sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 b} + \\ &- \sin a \sin b \sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 (b + \beta)}. \end{aligned}$$

Voor infinitesimale β wordt tot op grootheden van de tweede orde $\cos \beta = 1, \quad \sin \beta = \beta, \quad$ en $\sin D = \sin \beta \sin t = \beta \sin t$ (fig. 3).

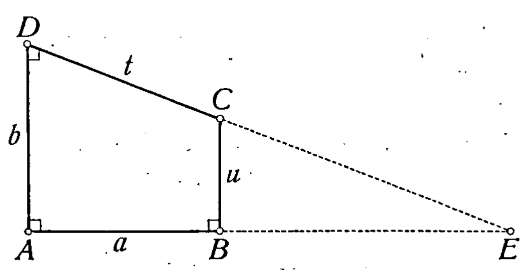


Fig. 3.

Daar $\sqrt{1 - 2\alpha} = 1 - \alpha$ voor infinitesimale α vindt men uit

$$\sin^2 a \sin^2 (b + \beta) = \sin^2 a \sin^2 b + 2 \sin^2 a \sin b \cos b\, \beta$$

gemakkelijk, dat

$$\sin D = \beta \,[\sin a \cos b / \sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 b}] = \beta \sin t$$

en daaruit

$$\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} a \cos b.$$

Analoog geldt dan

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} b \cos a$$

en men verkrijgt

$$\sin F = \sin a \sin b = \operatorname{tg} t \operatorname{tg} u.$$

Het zou nu wellicht voor de hand liggen om uit de „complementaire hoeken" DAC en CAB en het feit, dat $\operatorname{tg} t : \sin b$ en $\operatorname{tg} u : \sin a$ zich gedragen als het produkt van tangens en cotangens een *definitie* van de hoek CAB te geven. Dat dit een contradictieloos systeem levert is evenmin evident als in het geval van de euclidische onafhankelijke hoekmaatinvoering!

Men kan echter hier veel gemakkelijker verder komen en de *trigonometrie* opstellen. Is $a = \frac{1}{2}\pi$ dan is $u = 0$ en wel voor *alle* b. Tevens wordt dan $\operatorname{tg} t$ oneindig dus ook $t = \frac{1}{2}\pi$. Alle loodlijnen op AD snijden dus AB in een punt op $\frac{1}{2}\pi$ van A gelegen en hebben van het voetpunt op AD tot dit punt gemeten ook alle de lengte $\frac{1}{2}\pi$! De hoek gevormd door de lijnen DC en AB in dit snijpunt E kan dus, *met een additieve hoekmaat*, worden gemeten door AD in *lengte* te meten. De driehoek CBE is rechthoekig in B en heeft de zijden $\frac{1}{2}\pi - a$, u, en $CE = \frac{1}{2}\pi - t$ en daarbij de hoek E, die gemeten wordt met

$$\operatorname{tg} E \cos a = \operatorname{tg} u$$

Verder is dan in

$$\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} a \cos E$$

een tweede betrekking tussen zijden en hoeken van een rechthoekige driehoek gegeven.

Eliminatie van E levert

$$\sin^2 t\,[\cos^2 a + \operatorname{tg}^2 u] = \sin^2 a(1 - \sin^2 t)$$
$$\sin^2 t = \sin^2 a \cos^2 u$$

en met

$$\sin t = \pm \sin a \cos u$$

is voor driehoek BCE verkregen, dat de cosinus van de hypotenusa gelijk is aan het product der cosinus der rechthoekszijden, als alle zijden kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$ zijn.

Het is hiermede duidelijk, dat alle formules van de elliptische trigonometrie kunnen worden verkregen, formules welke identiek zijn met die der boldriehoeksmeting. De nadere verificaties worden aan de lezers overgelaten! Ook de vraag welke oppervlaktefuncties toelaatbaar zijn laten wij hier rusten.

Samenvatting en Conclusie.

Naast de niet-euclidische meetkunden gebaseerd op niet-ontaarde kegelsneden als „fundamentele kromme" bestaan twee meetkunden, die op ontaarde kegelsneden gebaseerd zijn. In deze meetkunden gelden de vijf axiomata van Euclides. De niet-euclidische euclidische meetkunde onderscheidt zich daardoor van de euclidische, dat cirkels worden gevonden in de rechten van een waaier en dat oppervlakten niet van nul verschillend kunnen zijn. Teneinde visuele misleidingen te voorkomen wordt het onderzoek zuiver arithmetisch uitgevoerd. Daar de twee meetkunden essentiële verschillen vertonen, moet de bewijsvoering van Euclides essentieel op visuele voorstellingen ten aanzien van de cirkel berusten. Niet zozeer het vijfde axioma als wel het derde axioma blijkt een „vlek" op Euclides te zijn! In verband hiermede wordt duidelijk naar voren gebracht, dat reeds in de Oudheid Zenoon van Sidoon zich verzet heeft tegen de aanvaarding van de *allereerste* conclusies van Euclides en dat — hoewel een roepende in de woestijn — Zenoon ten volle in het gelijk kan worden gesteld. Aangetoond wordt, dat de additie van lengten gecombineerd met loodlijn en additie van oppervlakte een eenvoudige uitsluiting van de niet-euclidisch euclidische meetkunde meebrengt en de rechthoekseigenschappen — en daarmede de stelling van Pythagoras — uiterst voor de hand liggend maakt. Wat „Euclides" en het onderwijs betreft zou steller zich niet gaarne aansluiten bij Dieudonné's „Euclid must go!" maar wel meent hij er op te moeten wijzen, dat de traditionele opvatting — van de laatste paar eeuwen aangaande Euclides' Elementen — historisch niet houdbaar lijkt en dat een onderwijs, dat het voor doet komen alsof aldaar een voorbeeld van zuivere opbouw wordt gegeven, in de tegenwoordige tijd niet meer geoorloofd is.

ADWAITA'S WISKUNDIG SONNET

door

TJ. S. VISSER

Amsterdam

A.

Hij werd geboren 100 jaar geleden, zomer 1863.

Een classicus en wijsgeer die tegen zijn 50ste poëet bleek en in zeven jaren een eruptie vertoonde van honderden sonnetten met nog enkele lange gedichten; om dan snel en vredig te overlijden: Johan Andreas dér Mouw heette hij, doch Adwaita was zijn keuzenaam, dat is: „hij die de tweeheid te boven is." Naam, gekozen om de band tussen Wereldziel en Zelf.

De verzen zijn ruw, maar van inhoud en verstechniek hoogst origineel en pakkend. Echt om van te houden . . . als je ervan houdt; zoals b.v. ik doe.

De sonnetten dateren van 1913—1919; vele verschenen het eerst in De Groene, die ik als vijftienjarige van een oom na lezing placht te ontvangen. Het hele leven en de hele wetenschap komen erin voor. Enkele spreken van muziekvreugde. En één is geheel wiskundig. Daaraan is dit opstel gewijd. Het gaat over een oneindige reeks waarmee „pi" berekend kan worden. Pi, de griekse p, staat voor het onmeetbare nooit geheel precies te becijferen getal hetwelk de lengte van een halve cirkelomtrek (periferie) aanduidt indien de straal tot maateenheid wordt genomen. Ruwweg is $\pi \doteq 3{,}14\ldots$ En de reeks waarmee men dit berekent, of zou kunnen berekenen, is fraai:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$$

Hoe vindt en bewijst men deze formule die van Leibniz stamt? Het sonnet geeft antwoord! Wees gij inmiddels archimediaans verblijd over deze elegante uitkomst; over de mensengeest die zo iets vinden kan; en over uw blijdschap ten dezen.

Vurig hoop ik dat ook niet-wiskundigen het volgende willen lezen. De mathematische vormen hebben zelfs ònbegrepen hun eigen schoonheid. En de algemene lijn van deze kleine studie — die tenslotte dan toch maar de analyse wil geven van een *gedicht* — is,

dunkt mij, zeer wel te vatten ook door de belangstellende alpha.

Hij wete dat de mathesis soms voor — 1 wonderlijkerwijs schrijft i^2, de tweede macht dus van „i". (Deze i is geenszins de i uit het woordje pi.) Daar liggen wel enige eeuwen traag denkwerk achter.

B.

En hij wete het volgende, ook zonder de symbolen te begrijpen. Een oneindig voortlopende reeks is zo onhandelbaar niet als de naam zou kunnen doen vermoeden. Zoals het bij gewoon cijferwerk prettig is om decimale breuken te gebruiken en dus $\frac{1}{7}$ te schrijven als 0,14285 . . . waarbij men afbreekt daar waar men meent voldoende nauwkeurigheid bereikt te hebben, zo is het in de hogere wiskunde nuttig om zo mogelijk een functie te ontwikkelen in een reeks, desnoods in een nimmer eindigende reeks, mits de reeks zodanig is, dat men door afbreken op een zelf gekozen punt een zelf gekozen graad van nauwkeurigheid in de uitkomst kan bereiken. Bij zulke reeksen pleegt elke volgende term minder gewicht in de schaal te leggen dan de vorige en tot gewichtloosheid te naderen; net zoals in 0,14285 de 5 slechts beduidt 5/100000 dus haast niets. Onder die oneindige reeksen zijn er die een bijzonder fraai verloop hebben en aldus tevens geschikt zijn om het gevoel voor schoonheid te bevredigen. In de repeterende breuken kent ge trouwens van jongs af aan reeds een bijzondere vorm van oneindige reeks.

Kort na de uitvinding van de infinitesimaalrekening heeft Maclaurin een alleraardigste methode opgesteld voor het vinden van reeksontwikkelingen van functies. De methode gaat niet altijd op; en waar ze opgaat is ze nogal eens bewerkelijk; ook is er voor haar exacte fundering een vrij breedvoerige beschouwing nodig, welke door (poëten en) achttiende eeuwse wiskundigen pleegt te worden verwaarloosd; maar ze blijft alleraardigst. En ze leidt voor de functies

$$e^z, \cos z, \sin z, \ln(1+z)$$

bliksemsnel tot een mooi resultaat. De reeksontwikkeling voor $\ln(1+z)$ laat voorts toe om tevens terstond een reeks op te schrijven voor

$$\ln \frac{1+z}{1-z}.$$

Bij π echter gaat het om een functie betrekking hebbend op lengten van cirkelbogen, die wij aanduiden met

$$\text{arc tg } z$$

en voor dié functie is de reeksvindingsmethode van Maclaurin weliswaar toepasbaar doch omslachtig. Er is daarom, dunkt mij, wel enige aanleiding voor de onderstelling, dat aan Dér Mouw voor ogen stond een reeksvinding voor arc tg z, niet rechtstreeks met Maclaurin doch indirect, namelijk via de als bekend te onderstellen reeksen voor:

$$e^z, \cos z, \sin z, \ln \frac{1+z}{1-z}.$$

En deze gissing van mij blijkt dan bij analysering van het sonnet, zie E, hoogst aannemelijk.

(Om misverstand te voorkomen zij meegedeeld, dat er ook heel andere afleidingen van de Leibniz-reeks voor arc tg z bestaan; daaronder een zeer korte, welke steunt op de stelling, dat sommige reeksen soms term voor term geïntegreerd mogen worden. Voor wiskundigen is het echter duidelijk dat dié afleiding niet in het sonnet bedoeld is.)

Ik meen dan, dat Adwaita in zijn sonnet heeft neergelegd een reeksvinding voor π *(dat is* 4 *arc tg* 1), *welke indirect gebruik maakt van Maclaurin.*

C.

Colin Mac Laurine werd in 1698 geboren te Kilmodan in Glendaruel en was dus op en top een Schot. Maar Schotland was arm en zo heeft deze jonge Aberdeense prof. Maclaurin moeten goedvinden, dat men op zijn salaris kortte, hetgeen men als pensioen aan zijn bejaarde voorganger Gregory geliefde te betalen. Maclaurin was een zo helder docent, dat hij de wiskunde in Schotland tot een nette populariteit bracht; dusdanig dat tegen zijn vroege levenseinde bijna alle genie-officieren in het Britse leger Schotten waren. Maclaurin had zeven kinderen en is gestorven omstreeks zijn 50ste jaar. Een leeftijd, waarop enkele eeuwen later Dr. Dér Mouw zou blijken dichter te zijn . . .

Bovenstaande gegevens putte ik uit de Mathematical Gazette van oktober 1915.

D.

Het sonnet van Adwaita (Dér Mouw) staat in de eerste uitgave der gedichten, verschenen 1919 onder de verzameltitel Brahman, op blz. I, 122.

Je zag met de x de spokig toov'rende i
Meefladd'ren als de zwevende exponent
Neerstreek tot reeks die naar 't oneind'ge rent
In stormloop naar de kringperiferie:

Omsmolt dan algebraise alchemie
Tot tweelingen twee legers, en 't quotiënt,
Vervloeid tot optocht van kentauren, ment
De magiër Logarithme voort naar Pi.

Ontzaglijke triomfpoort, zag je hem, hoog
Lichtende staan boven de Melkwegboog,
Verweerde band van cyklopisch gewelf;

En, flikkerende triomfatordracht
Rondom je, hing de hemel. En je dacht:
„IO TRIUMPHE" voor mijn eeuwig Zelf!

E.

Parafrase in vijf stappen, telkens gescheiden door eèn puntstreep lijn. Wiskundig gaat het om de eerste 8 regels. Men nummere die in gedachten om zo aanstonds de verwijzingen der analyse te kunnen volgen, want mijn Arabische cijfers duiden regels aan.

(1)—(4)

„Je zag met de x de spokig toov'rende i
Meefladd'ren als de zwevende exponent
Neerstreek tot reeks, die naar 't oneind'ge rent
In de stormloop naar de kringperiferie."

De oneindige reeks voor e^z heb ik, als onder B gezegd, bekend ondersteld. Vult men daar, min of meer brutaal, voor z in ix (voor i zie het slot van ons A) dan komt er:

$$e^{ix} = 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} \dots \qquad \text{(I)}$$

Ziet ge, hoe de i met de x is neergefladderd in een reeks, die naar het oneindige rent? O Maclaurin! En laat ons nu voor z ook maar eens invullen — ix:

$$e^{-ix} = 1 + \frac{(-ix)}{1!} + \frac{(-ix)^2}{2!} + \frac{(-ix)^3}{3!} \dots \qquad \text{(II)}$$

(5) — (6)

„Omsmolt dan algebraise alchemie
Tot tweelingen twee legers . . . .”

Het twéède lid van I, een oneindige reeks, mogen wij best een leger noemen. Dat leger gaan wij nu omvormen, lettend op $i^2 = -1$; en voorts onderstellend, dat de absolute en onvoorwaardelijke convergentie der reeks vast staat, zodat de volgorde der termen gewijzigd mag worden. Wij gaan daarom I nog eens herhalen.

$$(e^{ix} =)\ 1 + \frac{(ix)}{1} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)$$

De ene oneindige reeks hebben wij dus doen uiteenvallen in twee deelreeksen, waarbij de tweede voorzien is van de factor i. Maar zie, de eerste deelreeks is de reeks voor cos x, welke wij in B bekend onderstelden.

En de andere deelreeks is die voor sin x, eveneens bekend geacht als vlotte Maclaurin vondst. Zodat wij het leger hebben omgevormd tot

$$= \cos x + i \sin x. \qquad \text{(III)}$$

Nu gaan we op gelijke wijze het leger omvormen, dat we in het tweede lid van II vinden. Er komt:

$$(e^{-ix} =)\ 1 + \frac{(-ix)}{1!} + \frac{(-ix)^2}{2!} + \frac{(-ix)^3}{3!} \ldots \qquad \text{(IV)}$$

$= \cos x - i \sin x.$

Aldus hebben wij inderdaad beide legers omgevormd. En wat is er uit te voorschijn gekomen? Uit het ene ($\cos x + i \sin x$). Uit het andere ($\cos x - i \sin x$). Mogen wij die beide uitdrukkingen tussen haakjes niet, met de dichter, tweelingen noemen? Ze verschillen slechts in het minteken.

(6) slot en (8)

„. en ’t quotient,
„. . . . . .ment
„De magiër Logarithme voort naar . . . . .”

Het quotiënt der tweelingen, dat wordt dus, zie (III) en (IV):

$$\left(\frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = \right) \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x}$$

wat na deling van teller en noemer door cos x wordt:

$$\left(\frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = \right) \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}. \tag{V}$$

Hetgeen, zegt het sonnet, door tovenaar Logarithme voortgemend wordt. Wij nemen derhalve maar waarlijk van beide leden der gelijkheid V de natuurlijke logaritme.

Dat levert:

$$2ix = \ln \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}$$

of

$$x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}. \tag{VI}$$

(7)

„Vervloeid tot optocht van kentauren . . ."

De logaritme is dus ten tonele gevoerd. En die moet nu het quotiënt doen vervloeien tot een optocht. Hoe zit dat?

Om het te vatten, denken wij eraan, dat wij in B mede voorondersteld hebben kennis van de reeks voor $\ln(1 + z)$, zo snel met Maclaurin immers te vinden; met daar terstond uit volgend de reeks voor

$$\ln \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right). \tag{VII}$$

namelijk

$$2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\right). \tag{VIII}$$

Lezen wij nu, om weer op ons eigen pad terug te komen, in VII en VIII voor z min of meer brutaal i tg x; terwijl we tevens beide uitdrukkingen delen door 2i; dan gaan ze over in

$$\frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x} = \frac{1}{i}\left(i \operatorname{tg} x + \frac{i^3 \operatorname{tg}^3 x}{3} + \ldots\right).$$

Maar het eerste lid is juist wat er staat in het tweede lid van VI en dus niets anders dan x. Dehalve kunnen we de gelijkheid VI thans schrijven als

$$x = \frac{1}{i}\left(i \operatorname{tg} x + \frac{i^3 \operatorname{tg}^3 x}{3} + \ldots\right).$$

Dat ziet er al aardig kentaurachtig uit; nog meer indien wij, wat er na het gelijkteken staat, notéren als

$$(x =)\ \mathrm{tg}\, x + \frac{i^2\, \mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{i^4\, \mathrm{tg}^5 x}{5} \ldots$$

of ook, gedachtig aan $i^2 = -1$

$$(x =)\ \mathrm{tg}\, x - \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} \ldots \qquad \text{(IX)}$$

(8) slot

„................. voort naar Pi"

De tangens van $\frac{\pi}{4}$ is gelijk aan 1. Daarom substitueren wij eens in IX:

voor x de uitdrukking $\frac{\pi}{4}$ en dus voor tg x de waarde 1.

Er komt waarlijk:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad \text{(X)}$$

dus de reeks van Leibniz (1674, Parijs, in de schaduw van Christiaan Huygens; de reeks is 1671 reeds door de Schot Gregory neergeschreven). Reeks welke op de pioniers der infinitesimaalrekening een zeer grote indruk heeft gemaakt en welke Adwaita twee en een halve eeuw later nog bracht tot de triomferende terzinen van zijn sonnet. U herleze die.

Dit is het eind van onze parafrase, E. Of wilt ge nog iets horen over de dan volgende terzinen? Die triomfpoort kan zijn de Griekse letter π; kan mede zijn de reeks van Leibniz; ik voel voor het laatste. — Het „ik triomfeer" uit de slotregel zou men kunnen opvatten als uiting van trots mensheidsgevoel: „wat fraaie vinding van de mensengeest is die reeks!" De juiste uitleg van het sonneteinde is nochtans een weinig anders. De bundels van Adwaita zijn gedicht vanuit een gevoel van eenheid met de Algeest, Brahman. Welnu, wat Leibniz deed, deed wezenlijk Brahman; wat Brahman doet, doet wegens de eenheid ook Adwaita. Maar nog verder: wat Brahman verricht, verricht ook de geringste infuzorie, vanwege de eenheid. Of, met enige variatie, het is zoals op blz. 331 van de eerste druk staat geschreven van Brahman en de tuin van het heelal:

„Hij ziet die tuin, waar zich het eeuwig Zijn
Ontvouwt, veelogig aan als wereldschijn,
Of 't venster Newton heet of infuzorie".

Het gaat dus in regel 14 niet bepaaldelijk om de heerlijkheid van de mensengeest maar om de heerlijkheid van het Brahman, met hetwelk Dér Mouw zich één voelde. Daarom noemde hij zich Tweeheid-loze, Adwaita.

F.

Het is een ietsje spijtig dat de elegante reeks (X) ondeugdelijk is voor het werkelijk benaderend becijferen van π. Een benadering tot in 6 decimalen nauwkeurig zou 25 jaar rekenens vorderen! (Wijdenes, Middel-algebra II, de voetnoot op blz. 269.)

Voor het volstrekt aparte en thans wel antiquarische bewijs van Leibniz zelf sla de wiskundige op: G. Cantor, Geschichte der Mathematik, III blz. 77, druk van 1898[1]). Het bewijs van Gregory is nooit bekend geworden.

En nu tenslotte de poëet met de lange dunne baard, de erudiete Dr. Dér Mouw, Adwaita[2]). Het komt mij voor dat hij er prachtig in geslaagd is, bijna een halve eeuw geleden, om in een streng en ontroerend sonnet een exacte weergave neer te leggen van een wonderbaarlijke mathematische bewijsgang. Bewijsgang welke tot sobere achtergrond heeft de figuur, zie C, van de achttiend'eeuwse Schot Mac Laurine én het imaginaire getal i waarvan bij definitie geldt dat i maal i is min 1[3]).

En Adwaita's leven? Gewoontjes, gewoontjes:

„Maar na de smart om liefde en moeder beiden
Voel 'k als van ver mijn denken binnenglijden
De rust van Mahlers Kindertodtenlied."

Aldus schreef hij omstreeks zijn 50ste jaar.

---

1) Ook in H. Meschkowski, *Denkweisen grosser Mathematiker*, 1961, p. 50.

2) Zie het boeiend proefschrift van Dr. A. M. Cram-Magré; *Dèr Mouw-Adwaita, denker en dichter*, Groningen 1962. Voor het wiskundig element in zijn werk de voetnoot aldaar op p. 208. In de dissertatie komen ook de namen L. E. J. Brouwer en G. Mannoury voor.

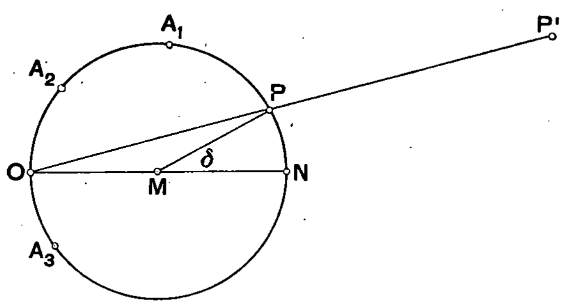
3) (Noot van febr. '63). Een π-boutade verschijnt vermoedelijk binnenkort in Hollands Maandblad.

OVER DE UITBREIDING VAN EEN VERSCHEIDENHEID

door

Dr. L. CRIJNS
Maastricht

Op blz. 120-121 jg. 38 IV heeft de heer Van der Welle een verrassende meetkundige oplossing meegedeeld van een vraagstuk uit de conforme afbeelding. Daarom moge hier een analytische behandeling volgen.



We leggen in Q de oorsprong O van een cartesisch stelsel met de X-as door 't middelpunt M van de gegeven cirkel (straal 1); 't tegenpunt van O zij N. Van een willekeurig punt P op de omtrek worden de coördinaten bepaald door

$$x = 1 + \cos\vartheta;\ y = \sin\vartheta \qquad (1),$$

waarin $\vartheta = \angle NMP$.

De vaste punten $A, B, C, \ldots.$ worden benoemd met $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in de volgorde, waarin we ze ontmoeten, als we van P uit langs de cirkelomtrek rondgaan in de richting PON.

De vraag is nu naar de grootste waarde van

$$f(P) = \Sigma\, a_i \times PA_i$$

d.i. $2\,\Sigma a_i \sin\frac{1}{2}(\alpha_1 - \vartheta) = 2\cos\frac{1}{2}\vartheta\,.\,\Sigma a_i \sin\frac{1}{2}\alpha_1 - 2\sin\frac{1}{2}\vartheta\,\Sigma a_i \cos\frac{1}{2}\alpha_1$

$$\text{of } 2\,f(0)\cos\tfrac{1}{2}\vartheta + 2f(\pi)\sin\tfrac{1}{2}\vartheta \qquad (2),$$

als $f(0)$ de waarde van $f(P)$ voor $P = N$ betekent en $f(\pi)$ voor $P = O$ en $\alpha_i = \angle NMA_i$. Door (2) met $\cos\frac{1}{2}\vartheta$, resp. $\sin\frac{1}{2}\vartheta$ te vermenigvuldigen, vinden we aan de hand van (1) voor de coördinaten van het beeld P' van P — P' ligt zo, dat $OP' = f(P)$ —

$$u = f(0)x + f(\pi)y;\ v = -f(\pi)x + f(0)y + 2f(\pi) \qquad (3).$$

De conforme afbeelding wordt dus bepaald door

$$u + iv \text{ als functie van } x + iy;$$

hier wordt aan de voorwaarden voor conforme afbeelding

$$u_x = v_y;\ u_y = -v_x$$

voldaan. De vergelijking van de beeldcirkel volgt door eliminatie van x en y uit (3) en $x^2 + y^2 = 2x$, d.i. (1),

$$u^2 + v^2 - 2f(0)u - 2f(\pi)v = 0;$$

de grootste waarde van $f(P)$ bedraagt dus $2\sqrt{f^2(0) + f^2(\pi)}$, de middellijn.

De ligging van deze cirkel is afhankelijk van de voor O gekozen plaats op de gegeven cirkelomtrek, maar zijn straal en daarmee zijn middellijn zijn invariant, omdat de hoeken $\alpha_1 - \vartheta$ bestand zijn tegen draaiing van ON om M.

BOEKBESPREKING

1. Walther Lietzmann, *Methodik des mathematischen Unterrichts*, 3. Auflage, bearbeitet von Richard Stender; 255 blz., geb. 18,— D.M.; 1961;

2. Richard Stender, *Didaktische Themen aus der neueren Mathematik*, 71 blz., ingen. 7,— D.M.; 1962;

Quelle und Meyer, Heidelberg.

Dr. Lietzmann's ,,Methodik des mathematischen Unterrichts", het standaardwerk in Duitsland voor allen die zich in het tweede kwart van de twintigste eeuw voor problemen van wiskunde-onderwijs interesseerden, is ook in Nederland geen onbekende. Door het ontbreken van een algemeen oriënterend handboek in de Nederlandse taal was het lange tijd voor vele onzer collega's hèt boek dat ten aanzien van didactische problemen betrouwbare informatie verschafte. Velen zullen daarom dr. Stender erkentelijk ervoor zijn, dat hij de tot op zekere hoogte ondankbare taak op zich heeft willen nemen, een nieuwe druk van Lietzmann's ,,Methodik" te verzorgen. Ondankbaar, omdat het schrijven van een werk geheel volgens eigen inzichten aantrekkelijker is dan het op de hoogte van de tijd brengen van een werk van oudere datum. Dr. Stender is er naar mijn mening uitstekend in geslaagd het waardevolle oude uit Lietzmann's werk met nieuwere inzichten te verbinden. Overal in het boek vindt men literatuurverwijzingen, ook naar belangrijke publikaties uit de jongste tijd.

Het boek is verdeeld in twee delen, een methodisch gedeelte (p. 1-76) en een didactisch gedeelte (77-253). In het eerste deel komen aan de orde:

Ziele des mathematischen Unterrichts, Wege der Unterrichtsführung, die Reformbewegung im mathematischen Unterricht, das mathemathische Lehrbuch. In het tweede deel: het leerplan en de afzonderlijke onderdelen van de wiskunde in dit leerplan.

Deze verdeling is vrij willekeurig. Het zou m.i. rationeler geweest zijn de methodiek in de geest van dit boek als een onderdeel van de didactiek te beschouwen.

Deze laatste is echter ingeperkt tot de ,,Darstellung des Gegenstand-Stofflichen der Mathematik unter dem Gesichtspunkt der Lehre" (77). Definiëren we de didactiek in de geest van Langeveld dan behoren de onderwerpen uit deel I er stellig ook in thuis.

Terwijl de eerste druk van ,,Lietzmann" uit drie delen bestond en de tweede druk tot twee delen was gereduceerd, is nu de omvangrijke stof in één enkel deel ondergebracht. Deze tiërcering heeft zijn voor- en zijn nadelen. De grote uitvoerigheid van de eerste druk past kwalijk bij het tempo van deze tijd; we juichen het toe, dat in een handboek voor aanstaande leraren en jonge leraren de ruimte gereserveerd voor de organisatie van het onderwijs, voor historische beschouwingen, voor reorganisatieplannen, drastisch wordt ingeperkt – en dat heeft dr. Stender gedaan – anderzijds leidt de beperking ertoe, dat vele aspecten van de didactiek niet voldoende uit de verf komen. Protocollen van lessen zoals Lietzmann die in zijn driedelig werk opnam over de behandeling van de stelling van Pythagoras, waren van hoge waarde voor ieder die een concrete toepassing van Herbart's befaamde leertrappen op het wiskunde-onderwijs wilde leren kennen. De behoefte aan lesprotocollen is in een periode, waarin alom onderwijsexperimenten genomen worden, eer toedan afgenomen.

In het hoofdstuk uit ,,Lietzmann-Stender" met de titel ,,Zur Methode des mathematischen Unterrichts" komen achtereenvolgens aan de orde: ,,dogmatische Methode", ,,individuelle Methoden", ,,Forschungsunterricht", ,,Sokratische Methode", ,,Arbeitsunterricht, frei und gebunden", ,,Sokratische Methode' en de methode van het exemplarisch onderwijs van Wagenschein, maar zonder nadere concretisering komen de kwaliteiten van deze verschillende methoden niet behoorlijk tot hun recht.

Door het uitgeven van afzonderlijke monografieën kan aan deze bezwaren tegemoetgekomen worden zonder dat het handboek zelf te lijvig wordt. In dit verband is Stender's ,,Didaktische Themen aus der neueren Mathematik" te beschouwen als een waardevol, ja als een onmisbaar supplement op ,,Lietzmann-Stender". Het boekje is geschreven in de geest van de opvattingen die in de conferentie van de OEEC te Royaumont in 1959 (zie Euclides jrg. **35**, p. 218-229) naar voren kwamen, en waarover men in het belangrijke rapport ,,Synopses for modern school mathematics" uitvoerige informatie ontvangt. Stender's boekje geeft een gedetailleerd overzicht van de problemen uit een gebied, waarin ook de Nederlandse wiskundeleraar thuis zal moeten zijn, als er ooit van een modernisering van het wiskundeonderwijs in de geest van Dieudonné sprake zal kunnen zijn. Stender's boekje is niet slechts een stuk ,,theorie" ten aanzien van de gepropageerde modernisering, het bevat tevens een weerslag van de eigen onderwijservaringen van de auteur. Toch bevat het nog nergens een overzicht van de stof in een vorm zoals deze voor onze scholen van v.h.m.o. in de bovenbouw bruikbaar zou zijn. Uit de inhoud noemen we: (1). der Aussagenkalkül, (2). der Prädikatenkalkül, (3), Beziehungen der formalen Logik zur Mengenlehre, (4). Axiome, Definitionen, Sätze, (5). Möglichkeiten einer schulischen Neugestaltung der Infinitesimalrechnung, (6). Matrizen und Determinanten, (7). Sinn und Aufgabe der modernen Algebra.

De hier geopende perspectieven zijn wijder dan die welke binnen afzienbare tijd in het bereik van het Nederlandse onderwijs liggen. Dit neemt niet weg dat we Stender's rapport in handen wensen van alle wiskundeleraren die hun standpunt t.a.v. de in gang zijnde modernisering wensen te bepalen, terwijl we het grotere werk van Lietzmann-Stender een belangrijk werk blijven achten voor allen die zich een eenvoudige betrouwbare gids ter oriëntering in de didactische problemen van de wiskunde wensen aan te schaffen.

Joh. H. Wansink.

W a t s o n F u l k s, *Advanced Calculus*, An introduction to Analysis, New York-London. John Wiley & Sons Inc. 520 blz. ± *fl.* 50.40.
In alle opzichten een prachtuitgave.

De schrijver begint met de behandeling van de natuurlijke getallen aan de hand van de vijf axioma's van Peano. De stof, die ons hier wordt voorgezet, verschilt misschien niet veel van de eisen voor een modern kandidaatsexamen. Het boek is verdeeld in drie delen. Het eerste deel begint met de functietheorie van een enkele reëele veranderlijke, het tweede deel houdt zich bezig met functies van meer veranderlijken en met de vectorrekening, terwijl het derde deel dieper ingaat op de theorie van de reeksen. De auteur onderscheidt *A*, *B* en *C* opgaven van zuiver wiskundige aard in opklimmende moeilijkheid gerangschikt; achter in het boek vindt men antwoorden, aanwijzigingen en oplossingen, zodat het zich m.i. buitengewoon leent voor teamwork dus ook voor ,,hogere" Daltonscholen. Ondanks deze éloge neem ik de vrijheid op enige kwesties te attenderen, die o.a. op pag. 45 geplaatst zouden kunnen worden.

pag. 9 of 10: ik mis de opmerking, dat de segmenten $\overline{OI}$ en $\overline{OP}$ van de getallenrechte in 't algemeen geen gemene maat zullen bezitten evenmin als de zijde en diagonaal van een vierkant, zodat de verhouding niet tot een eindige kettingbreuk zal leiden. Welke kettingbreuken worden opgeleverd door $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$?

pag. 17 A: Hoe 1(*c*) te bewijzen m.b.v.
$\sum_1^n \{(k+1)^3 - k^3\} = \sum_1^n (3k^2 + 3k + 1)$, hoe door middel van onbepaalde coëfficiënten? Mag ik tevens verwijzen naar *Polya Mathematical Discovery* Vol. I pag. 65, 67?

pag. 18 no *5*: Hoe tot het zelfde resultaat te komen door, zoals Dr G. S c h o u t e n, uit te gaan van de ongelijkheid $nb^{n-1} < \dfrac{a^n - b^n}{a-b} < na^{n-1}$, waarbij $a = 1 + \dfrac{1}{n-1}$ en $b = 1 + \dfrac{1}{n}$? Hoe eveneens af te leiden, dat $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ een klimmende fundamentale rij op levert dus $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$ een *dalende*, mits men nu $a = 1 - \dfrac{1}{n}$ en $b = 1 - \dfrac{1}{n-1}$ stelt? Tot welke limiet (en hoe?) zullen beide rijen $(n \to \infty)$ naderen? Bewijs dit.

pag. 25 2.2a: Kan het theorema $a^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ als $0 < a < 1$ niet eenvoudiger m.b.v de ongelijkheid van Bernoulli worden bewezen?

pag. 44 B2: Neem toch $\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \ldots}}}}$ en laat door volledige inductie zien, dat $a_n < \sqrt{3} + 1$. Bereken de limiet $(n \to \infty)$ en bevestig, dat deze, wat te verwachten was, $< \sqrt{3} + 1$ is.

Alle grondtripels van de ,,stelling van Pythagoras" $c^2 - a^2 = b^2$ konden volgens de Sumeriers worden verkregen door $c = p^2 + q^2$ en $a = p^2 - q^2$ (p en q ond. ond. maar niet *beide* oneven) te stellen, dus $b = 2\,pq$. Hoe is b.v. het drietal 18541, 12709, 13500, vermeld op een kleitafel, gevonden?

Bewijs, dat zo *alle* grondtripels de revue passeren.

Hoofdstuk 4 bespreekt het integraal begrip volgens Riemann en het volgende caput de elementaire transcendente functies $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ $(x > 0)$ en de inverse functie exp x alsmede de cyclometrische functies met hun inversen, aan welke volgorde wij (evenals de schrijver?) nog wat moeten gewennen. Op blz. 114 B1 wordt gelukkig nog gewezen op een niet meetkundig bewijs van de bekende gon. additie theorema's (zie ook Dr L. Kuipers leerboek der analyse pag. 94 VI) Op deze pag. is nog plaats voor de vragen: Hoe langs meetkundige weg te laten zien dat $\log \frac{1}{a} = -\log a$ $(a < 1)$ en hoe gemakkelijk, dat $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} < \log n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n-1} \left(+ \frac{1}{n} \right)$ dus $1 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} - \log n > 0$, dat tenslotte $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} - \log n \right)$ heus bestaat (Euler, Mascheroni)

Na de middelwaarde stelling van Cauchy maken we kennis met de regel van l'Hospital en vervolgens met de formule van Taylor vastgeknoopt aan de eig. van e^x, wat m.i. Dr. Vredenduin wel zal bevallen; voor de afleiding van de restterm gebruikt de schrijver de algemene vorm van genoemde stelling.

Deel II (pag. 147-333) is gewijd aan de rekening met vectoren en evenals het eerste buitengewoon goed verzorgd. Toch veroorloof ik mij een vraag in verband met de vectorprodukten 8.2: is het après tout niet *eenvoudiger en beter* van de *definities* $a \cdot b = |a|\,|b| \cos(a, b)$ resp. $a \times b = |a|\,|b| \sin(a, b)$ uit te gaan zoals, voor zover ik zie, in Europa nog usance is? Van de *del of nabla* operator wordt een dankbaar gebruik gemaakt om de betekenis van de gradient van een scalarveld en de divergentie en rotatie van een vectorveld eenvoudiger weer te kunnen geven met het oog op de integraalstellingen van Gausz en Stokes. In het elfde hoofdstuk, dat zich vooral met de inverse transformaties bezig houdt, maken we weer kennis met de determinant van Jacobi.

Deel III Theory of convergence blz. 335-497

Op werkelijk meesterlijke wijze belicht de enthousiaste schrijver, geholpen door duidelijke schetsen, in deze derde ronde o.a. de betekenis van de gelijkmatige convergentie; maar een mens is niet onfeilbaar: pag. 359 C, hier zal bedoeld zijn $\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ en dan nog 2 slips of the pen op pag. 374 vierde regel van boven en op pag. 385 zesde regel van beneden.

In hoofdstuk 19 maken we kennis met de Gamma en Beta functies van Euler benevens met de methode van Laplace, die ons de asymptotische formule van Stirling levert.

Bijna zou ik vergeten te gewagen van de zeer geestige formulering van de reeks Taylor $f(x + h) = e^{hD} f(x)$ op blz. 394.

Het twintigste en laatste hoofdstuk (pag. 335) van dit aanbevelenswaardig boek vestigt de aandacht op de reeksontwikkeling van Fourier. Voor de behandeling van de complexe getallen zijn slechts vier, maar degelijke, bladzijden uitgetrokken.

Okken

A. Kneschke, *Differentialgleichungen und Randwertprobleme* Lehrbuch für Naturwissenschaftler and Ingenieure. B. G. Teubner, Leipzig, 1962, dl I, DM 47; dl II, DM 44.65; dl III, DM 49.50. Imp.: Meulenhoff en Co., Amsterdam.

De inhoud van dit boek en de methode van behandeling der stof kenmerken het duidelijk als vooral bedoeld voor natuurkundigen en ingenieurs. De schrijver legt daar in een voorwoord nog eens de nadruk op. Existentietheorema's komen er niet in voor. Eenduidigheidsstellingen worden een enkele maal genoemd, maar doorgaans niet bewezen. Soms wordt de opmerking gemaakt, dat ze op fysische gronden duidelijk zijn. Bij de stelling van Dirichlet uit de potentiaaltheorie meent de schrijver te kunnen volstaan met een bewijs, dat op de eenduidige bepaaldheid der Greense functie berust. Meer dan eens, vooral waar hij stellingen uit de complexe functietheorie toepast, deelt de schrijver mee, dat hij het bewijs achterwege laat. Wie uit deze opmerkingen de gevolgtrekking zou maken, dat hij met een uit mathematisch oogpunt eenvoudig boek te doen heeft, zou zich zeer vergissen. Er wordt zeer veel in behandeld en daaronder moeilijke onderwerpen.

Het eerste deel behandelt gewone differentiaalvergelijkingen. Vooreerst de indeling der differentiaalvergelijkingen, met voorbeelden uit de toepassingen zowel van gewone als van partiële differentiaalvergelijkingen. Dan verschillende gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde die een directe oplossing toelaten; vervolgens een hoofdstuk over singuliere oplossingen. Dan differentiaalvergelijkingen van hogere orde die door hun bijzondere vorm integreerbaar zijn, lineaire vergelijkingen met vele voorbeelden, systemen van differentiaalvergelijkingen, integratie door reeksen, de vergelijking van Bessel, reeksontwikkeling van willekeurige functies, lineaire randwaardeproblemen in het algemeen, het probleem van Sturm-Liouville, dat van Fourier, van Legendre, van Bessel. Dan nog een hoofdstuk over benaderde oplossing.

Het tweede deel behandelt partiële differentiaalvergelijkingen. Na een tamelijk beknopte behandeling van de vergelijkingen van de eerste orde, komen de quasilineaire vergelijkingen van de tweede orde en de onderscheiding in de drie typen. Van elk der drie typen voorbeelden. Aan de behandeling der potentiaalvergelijking wordt een vrij uitvoerige behandeling van de eigenschappen van de potentiaal en van de randwaardeproblemen der potentiaaltheorie vastgeknoopt. In de zelfde geest wordt de warmtegeleidingsvergelijking behandeld en nog wat uitvoeriger de golfvergelijking, waar b.v. ook de vergelijking van Schrödinger ter sprake komt. Het laatste hoofdstuk behandelt transversale trillingen van staven en platen, daar komen dus ook vergelijkingen van de vierde orde ter sprake.

Het derde deel is het duidelijkst op de belangstelling van de ingenieur toegepast. Het begint met een lang hoofdstuk over de differentiaalvergelijkingen der elasticiteitstheorie, dan de hydro- en aeromechanica, daarna integratie met behulp der Laplace-transformatie en een hoofdstuk over variatietheorie. Het laatste hoofdstuk behandelt de benaderde oplossing van randwaardeproblemen, de methode van Ritz-Galerkin en de methode van Trefftz.

Vraagstukken ter oplossing door de gebruiker komen in het gehele werk niet voor, maar daarentegen wel een groot aantal geheel uitgewerkte voorbeelden.

H. Bremekamp.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgend nummer worden opgenomen, indien ze binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, de Houtmanstraat 37, Hoogezand.

MATHEMATISCH CENTRUM

Orienterend Wiskunde Colloquium voor docenten V.H.M.O.

Evenals vorig jaar zal aan het Mathematisch Centrum in de cursus 1963/'64 een Oriënterend Wiskunde Colloquium voor docenten V.H.M.O. worden gehouden.

Het thema van dit Colloquium luidt:

Verzamelingenleer met toepassingen

De commissie van wiskunde-docenten, welke deze colloquia organiseert, kwam tot de keuze van dit onderwerp door de overweging dat het nieuwe colloquium voor iedereen met vrucht te volgen moet zijn, ook voor hen die niet deelnamen aan het vorige colloquium. Anderzijds werd continuiteit met het vorige colloquium — gewijd aan de verzamelingenleer — van belang geacht, mede daar dit laatste nog niet tot een natuurlijke afsluiting gekomen was.

Het ligt in de bedoeling in dit colloquium de grondbegrippen der verzamelingenleer — die opnieuw, ab ovo, zullen worden ingevoerd — te illustreren met concrete voorbeelden en toepassingen. Voorts zal aan deze begrippen relief worden verleend door de behandeling van met de verzamelingenalgebra verwante systemen, zoals Boole'se algebra's (verband met elektrische schakelingen) en de eigenschappenlogica. Ook zullen vermoedelijk enkele onderwerpen uit de „meetkundige" verzamelingenleer (de verzamelingentheoretische topologie) aan de orde worden gesteld.

Het colloquium wordt voorts op dezelfde leest geschoeid als dat van de vorige cursus.

De bijeenkomsten vinden plaats in principe op de eerste en derde woensdagavond in de maand, te beginnen *woensdag 2 oktober* 1963, van 19.45—21.30 (precies), in het gebouw van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam (O).

Het M.C. is te bereiken met tramlijnen: van C.S. lijn 4 tot Frederiksplein, overstappen op lijn 7 of 10; van Amstelstation lijn 7; van M.P. lijn 3; het M.C. is drie minuten gaans verwijderd van het eindpunt van de bus uit den Haag aan de Wibautstraat.

Aan de deelnemers zal een uitgebreide syllabus met literatuuropgaven worden verstrekt. Er bestaat de mogelijkheid reiskosten te declareren. Opgave ter deelname aan het colloquium gaarne vóór 20 september a.s. aan ondergetekende.

Namens de organiserende commissie,
Drs. P. C. Baayen, secr.

VAKANTIECURSUS — 1963

Op 26 en 27 augustus werd te Amsterdam gehouden de Vakantiecursus van het M.C. Het centrale onderwerp „*Topologie*" werd behandeld in de voordrachten van

Prof. Dr. W. T. van Est: De ontwikkeling van de algebraische topologie"
Drs. J. M. Aarts: „Het vierkleurenprobleem"
Dr. J. C. Boland: „Onderwerpen uit de grafentheorie"
Drs. P. C. Baayen: „Opmerkingen over de verzamelingtheoretische topologie".

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

94. Hoe *moet* men een stel gewichten samenstellen, om daarmee alle gehele aantallen grammen van 1 tot en met de som der gewichten te kunnen wegen, als bovendien bij elk gegeven aantal gewichten deze som maximaal is?
(H. M. J. van Overeem)

95. Plaats van handeling: een bibliotheek, ergens ten plattelande.
Personen: de portier daarvan plus de *n* klanten.
Gegevens: Elk van de *n* klanten bezoekt èlke dag één keer de bibliotheek (deze is geopend van 10.00 tot 17.00). En iedere dag weer opnieuw herhaalt zich dit merkwaardige feit: bij elk willekeurig drietal klanten zijn er minstens twee, die elkaar in de bibliotheek ontmoeten. Op zekere dag heeft de portier de opdracht gekregen een mededeling van de directie met luider stemme voor te lezen. Hij moet dit zo dikwijls doen, dat elke klant van hèm persoonlijk die mededeling hoort.
Vraag: Met hoeveel malen voordragen kan de portier volstaan? Welke tijdstippen moet hij dan daarvoor uitkiezen?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer).

91. a. We gaan eerst na, wat voor soort permutaties van de beginstand we door het verschuiven bereiken kunnen. We gaan daartoe uit van

2	7	5	8
15	3		9
10	4	12	14
1	13	11	6

We rangschikken deze getallen te beginnen links boven 2 7 5 8. Daarachter de tweede regel van rechts naar links, dus 9 3 15. Daarachter de derde regel van links naar rechts en ten slotte de vierde van rechts naar links. Dus 10 4 12 14 6 11 13 1.

We kunnen nu de 5 naar beneden schuiven of de 12 naar boven. In het eerste geval springt in onze rangschikking 5 over de twee getallen 8 en 9 heen; in het tweede geval springt 12 over de vier getallen 3 15 10 4 heen. In beide gevallen is dus de nieuwe permutatie een even permutatie van de oorspronkelijke. Het verschuiven van 3 of van 9 heeft uiteraard geen invloed op de volgorde. Uit een bepaalde stand kunnen dus alleen standen bereikt worden, die een even permutatie van de uitgangsstand zijn. Het zal dus niet mogelijk zijn de 15 en de 14 te verwisselen.

b. De situatie is hier anders, doordat er twee gelijkluidende vierkantjes zijn, nl. de twee, waar DE op staat.

We gaan nu eerst naar het geval a terug en bewijzen, dat elke even permutatie van de beginstand bereikt kan worden. We zien gemakkelijk in, dat we elk getal over twee andere heen vooruit of achteruit kunnen bewegen (zoals in ons voorbeeld gebeurt door 5 omlaag te schuiven). Verder kunnen we elke even permutatie opbouwen als som van een aantal dergelijke sprongen.

Men kan dit met volledige inductie bewijzen. Het is echter ook gemakkelijk aan voorbeelden te demonstreren. Onderstel we gaan uit van

7 3 5 1 4 2 6

en willen deze in natuurlijke volgorde brengen door telkens een getal twee andere over te laten springen. We gaan dan als volgt te werk:

7 1 3 5 4 2 6
7 1 3 2 5 4 6
7 1 2 5 3 4 6
7 1 2 3 4 5 6
1 2 3 4 5 6 7.

Eerst brengen we de 1 dus zover mogelijk naar voren, daarna de 2 zo dicht mogelijk rechts van 1, enz.

Het is mogelijk, dat we in moeilijkheden komen, doordat we op het eind krijgen

b.v. 654.

We kunnen dan de 5 niet naar rechts bewegen. We bewegen nu eerst de 6 en daarna pas de 5, waardoor we opvolgend krijgen

5 4 6
4 6 5.

Nu kan de 6 weer niet verder naar rechts en moeten we dus eerst de 7 naar rechts laten springen. Ten slotte zijn er twee mogelijkheden:

1e. we krijgen 1 2 3 4 5 6 7;
2e. we krijgen 1 2 3 4 5 7 6.

In het eerste geval hebben we een even permutatie van de aanvangsstand op de gewenste manier tot stand gebracht. In het tweede geval is 1 2 3 4 5 6 7 een oneven permutatie van de beginstand en kan dus niet tot stand gebracht worden.

Het probleem is nu snel opgelost. Verwisseling van de beide DE's is een oneven permutatie, verwisseling van EN en G eveneens. Het uitvoeren van beide verwisselingen is dus een even permutatie. Omdat elke even permutatie uitvoerbaar is, kan men nu dus de gevraagde eindstand wel bereiken.

92. Onderstel, dat $n = 5$ (of minder). Men kan dan de 5 personen rangschikken in de hoekpunten van een vijfhoek. Onderstel, dat personen, die aan de uiteinden van een zijde staan, elkaar haten, en personen, die aan de uiteinden van een diagonaal staan, elkaar liefhebben. Dan blijkt aan de geëiste eigenschap niet voldaan te zijn. En dus kan n niet gelijk aan 5 of kleiner dan 5 zijn.

Onderstel, dat $n = 6$ (of meer). Kies een willekeurig persoon A. Er zullen dan minstens drie personen A liefhebben of minstens drie personen A haten. Onderstel het laatste is het geval en noem drie personen, die A haten B, C, en D. Dan kunnen B en C elkaar niet haten, C en D ook niet en B en D evenmin. Dus moeten B, C en D elkaar alle liefhebben.

Neem nu aan, dat A en B elkaar liefhebben, A en C ook en A en D eveneens. We hebben dan de volgende logische omvorming nodig:

als geen drie personen elkaar haten, dan is er ten minste één drietal, dat elkaar liefheeft,

is gelijkwaardig met

als geen drie personen elkaar liefhebben, dan is er ten minste één drietal, dat elkaar haat.

Hiermee is dit geval teruggebracht tot het vorige.

Het antwoord op de gestelde vraag is dus $n \geqq 6$.

93. Tweeëndertig paarden. Plaats ze namelijk op alle zwarte velden.